第一届圣诞节美国数学奥林匹克竞赛（第一天）

2020 年 1 月 10 日至 2020 年 2 月 3 日

第一题. 设函数 $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$（即 f 将正实数映射到正实数）为非常数函数，且对任意正实数 x 和 y 满足

$$f(x)f(y)f(x+y)=f(x)+f(y)-f(x+y).$$

证明：存在常数 $a>1$ 使得对所有正实数 x 都有

$$f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}.$$

第二题. 设 k 为正整数，$p>3$ 为素数，n 为整数且 $0\le n\le p^{k-1}$。证明：

$$\binom{p^k}{pn}\equiv\binom{p^{k-1}}{n}\pmod{p^{2k+1}}.$$

第三题. 三角形 ABC 的内切圆 ω 分别与边 BC、CA、AB 相切与点 D、E、F。设 M 为 EF 的中点，T 为 ω 上一点，使得线段 DT 是 ω 的直径。直线 MT 与过 A 且平行于 BC 的直线相交于点 P，并再次与 ω 相交于点 Q。直线 DF 和 DE 分别于直线 AP 相交于点 X 和 Y。

证明：三角形 APQ 的外接圆与三角形 DXY 的外接圆相切。

时间：*4* 小时 *30* 分
每题七分

第一届圣诞节美国数学奥林匹克竞赛　　　（第二天）

2020 年 1 月 10 日至 2020 年 2 月 3 日

第四题. 设 Q 为三角形 ABC 的外接圆上一点。设 E 和 F 分别为点 Q 关于 AB 和 AC 的对称点。设点 X 和 Y 在直线 EF 上，使得 $BX \parallel AC$ 且 $CY \parallel AB$。设 M 和 N 分别为点 X 和 Y 关于 B 和 C 的对称点。证明：M、Q、N 三点共线。

第五题. 设 $f(x) = x^2 - 2$。证明：对任意正整数 n，多项式

$$P(x) = \underbrace{f(f(\dots f}_{n\text{ 次}}(x)\dots)) - x$$

可以分解为两个次数相同的整系数多项式之积。

第六题. 设 n 为正整数。一个猎人和一只乌贼在无限的方格表上进行回合制游戏。猎人的目标是移动到与乌贼相同的方格，从而抓住它。

初始时，所有方格均为白色。乌贼从方格表的任意一方格开始，猎人再选择一个不同的方格作为起点。游戏由乌贼先行。

每次轮到乌贼，它执行 2020 次如下操作：

- 选择一个相邻的白色方格；
- 移动到该方格；
- 将原来的方格喷涂为黑色或灰色。

当乌贼完成这 2020 次操作后，所有灰色方格会自动重新变为白色，乌贼回合结束。此外，乌贼患有幽闭恐惧症，因此在任何时刻，它都不能被黑色或灰色的方格围城一个封闭环。

每次轮到猎人，他最多可以执行 n 次如下操作：

- 选择一个相邻的白色单位格；
- 移动到该方格。

若猎人在某一时刻与乌贼位于同一个方格，则猎人获胜。假设双方始终知道对方的位置及所有方格的颜色，且双方都采取最优策略。求所有正整数 n，使得猎人能在有限步内必胜。

时间：*4* 小时 *30* 分
每题七分