第三届圣诞节美国数学奥林匹克竞赛 （第一天）

2022 年 3 月 4 日至 2022 年 3 月 19 日

第一题. 设 H 为锐角三角形 ABC 的垂心，M 为边 BC 的中点，D 为 A 到直线 BC 的垂足。设点 P 使得凸四边形 $HMPD$ 是平行四边形。以 P 为圆心且过点 B 和 C 的圆与直线 AB 和 AC 的另一交点分别为 X 和 Y。

证明：D、X、Y 三点共线。

第二题. 求所有函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对任意整数 x 和 y，都有

$$f(f(x)f(y)) = f(xf(y)) + f(y).$$

第三题. 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 为正整数，使得可以将 $\mathbb{N}$ 划分为无穷多个形如 $\{a_1k, a_2k, \ldots, a_nk\}$ 的集合。

证明：a_1、a_2、…、a_{n-1} 都整除 a_n。

时间：*4* 小时 *30* 分

每题七分

第三届圣诞节美国数学奥林匹克竞赛 （第二天）

2022 年 3 月 4 日至 2022 年 3 月 19 日

第四题. 一个飞机场的登机口排列成一个 $10^{2022} \times 10^{2022}$ 的方阵，按某种顺序编号 1、2、3、…、10^{4044}。一名旅客忘记了她的登机口，工作人员告诉她，她的登机口是唯一一个编码比所有相邻（有共同边的）登机口都小的。旅客还可以问工作人员一些问题，每次问一个登机口的编号，工作人员会如实回答。（旅客知道机场的布局，但不知道登机口的编号。）

证明：无论登机口如何编号，旅客总能问不超过 10^{2023} 个问题，找到她的登机口。

第五题. 证明或否定：对任意正整数 k，都有

$$\gcd\left((2k-1)^{2k-1}+(2k+1)^{2k+1},(2k-1)^{2k+1}+(2k+1)^{2k-1}\right)=4k^2.$$

第六题. 设 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 为凸五边形，满足对任意 i，$A_{i-1}A_{i+1} \parallel A_{i-2}A_{i+2}$ ，其中脚标按模 5 理解。

证明：存在点 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5 满足

- 对任意 i，点 B_i、A_{i-2}、A_{i+2} 共线；
- 五条线段 A_iB_i 的长度相等；
- 五条直线 A_iB_i 共点。

时间：*4* 小时 *30* 分

每题七分