

第四届圣诞节美国数学奥林匹克竞赛

(第一天)

2023 年 3 月 13 日至 2023 年 3 月 27 日

第一题. 在一个谷仓中, 100 只小鸡安静地坐成一圈。起初, 每只小鸡正对着它左边或右边的小鸡。突然, 每只小鸡将头转向它的另一侧邻居 (转向速度非负、可变)。如果两只小鸡在某个时刻同时彼此相对, 则称它们对视过。

问: 在这个过程中 (包括开始和结束时), 最多有多少对小鸡对视过?

第二题. 圆 ω_1 和 ω_2 交于点 A 和 B , 点 C 和 D 分别在 ω_1 和 ω_2 上, 使得线 AD 和 BC 平行。直线 AC 和 BD 交于点 S , 且 S 位于圆 ω_1 和 ω_2 的外部。

证明: ω_1 上存在点 U , ω_2 上存在点 V , 使得直线 SU 和 ω_1 相切, 直线 SV 和 ω_2 相切, 且直线 AB 平分线段 UV 。

第三题. 若一个多项式的所有非零系数均为 1, 则称其为二进制多项式。设 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 、 $R(x)$ 为整系数多项式, n 为整数, 使得

$$R(x) = x^n \cdot Q(1/x).$$

证明: 若 $P(x) \cdot Q(x)$ 是二进制多项式, 则 $P(x) \cdot R(x)$ 也是二进制多项式。

时间: 4 小时 30 分
每题七分

第四届圣诞节美国数学奥林匹克竞赛

(第二天)

2023 年 3 月 13 日至 2023 年 3 月 27 日

第四题. 设 c 是整数。证明：只有有限多对正整数 a 和 b ，满足

$$\left\lfloor (3 + 2\sqrt{2})^a \right\rfloor = 2^b + c.$$

(其中， $\lfloor x \rfloor$ 是少于等于 x 的最大整数。)

第五题. 求所有函数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ，满足以下条件：

- 只有有限多个复数 x 满足 $f(x) = 0$ ；
- 对于所有满足 $f(x) = yz$ 的复数 x, y, z ，都有 $zf(x+y) = yf(x+z)$ 。

第六题. 设 \mathcal{P} 是一个凸多边形， $2\mathcal{P}$ 是 \mathcal{P} 扩大两倍后的图形。证明： $2\mathcal{P}$ 可以用七个与 \mathcal{P} 全等的图形覆盖。(多边形包含其内部及边界。)

时间：4 小时 30 分
每题七分